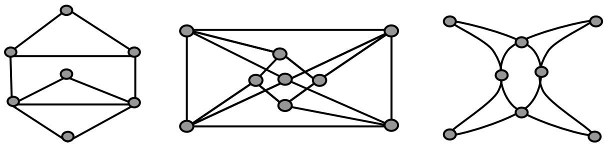
RECORRIDOS EN GRAFOS

3) Estudiar si los siguientes grafos son eulerianos o admiten un recorrido euleriano abierto:



Solución

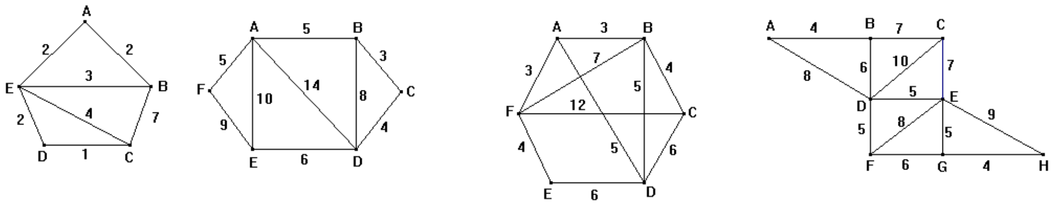
recorrido euleriano abierto no euleriano euleriano

4) ¿Para qué valores de n los grafos C_n, K_n, $K_{n,n}$ y Q_n son eulerianos?

Solución

Los grafos C_n son conexos y por tanto, son eulerianos para todo n.
Los grafos K_n son conexos y por tanto, son eulerianos si y sólo si n es impar.
Los grafos $K_{n,n}$ y Q_n son conexos y por tanto, son eulerianos si y sólo si n es par.

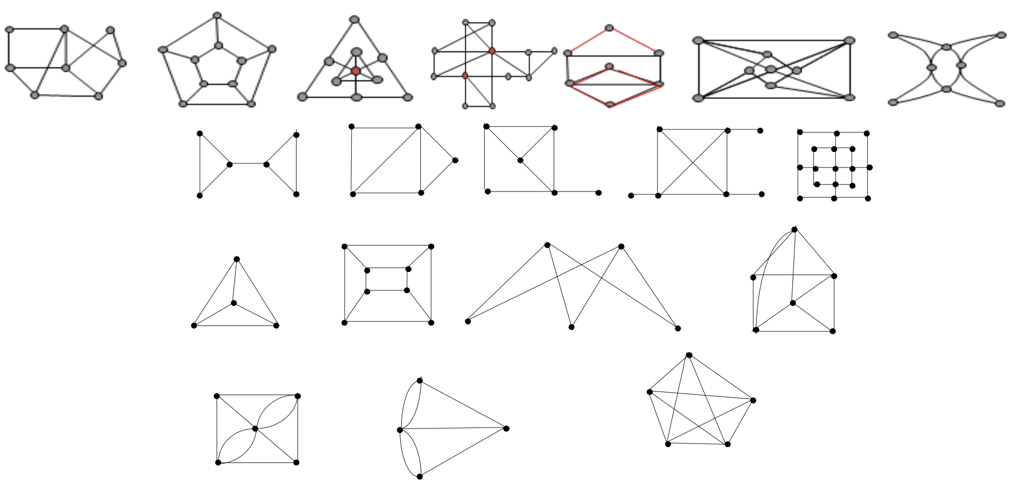
7) (Problema chino del cartero, Kwan, 1962): Un cartero sale de correos con las cartas, recorre las calles de su zona y vuelve a la central minimizando la distancia recorrida. Resolver este problema si las calles que debe recorrer son las representadas en los siguientes grafos:



Solución:

a) Duplicando las aristas BE, ED, DC se obtiene un grafo euleriano cuyo recorrido euleriano es mínimo.
b) Duplicando las aristas BC, CD, DE se obtiene un grafo euleriano cuyo recorrido euleriano es mínimo.
c) Duplicando las aristas AB, BC se obtiene un grafo euleriano cuyo recorrido euleriano es mínimo.
d) Se considera el subgrafo completo BCDEFG formado por los seis vértices con grado impar, se procura el emparejamiento completo de coste mínimo BC, DF, EG y se duplican las aristas correspondientes a los vértices emparejados BC, DF, EG, así se obtiene un grafo euleriano cuyo recorrido euleriano es mínimo.

9) Estudiar si cada uno de los siguientes grafos contiene un ciclo hamiltoniano, o si contiene un camino hamiltoniano:



Solución:

Grafo	Características	ciclo hamiltoniano	camino hamiltoniano no cerrado
1		si	si
2		si	si
3	tiene 1 punto de corte	no	si
4	si se suprimen los 2 vértices señalados en rojo aparecen 3 componentes conexas	no	no
5	las 2 aristas de los 3 vértices de grado 2 tienen que estar en el ciclo hamiltoniano	no	no
6		si	si
7		si	si
8	tiene 2 vértices de corte	no	si
9		si	si
10	tiene 2 vértices de corte	no	si
11	tiene 6 vértices de corte	no	no
12	es bipartido con 17 vértices	no	no
13	tetraedro	si	si
14	cubo	si	si
15	es bipartido con 5 vértices	no	si
16	$\delta(v) \geq n/2$	si	si
17	$\delta(v) \geq n/2$	si	si
18	$\delta(v) \geq n/2$	si	si
19l	K_5	si	si

12) En una red de 10 ordenadores cada nodo está conectado al menos con otros 6 y el número total de conexiones es múltiplo de 13. ¿Es la red conexa? ¿Cuántas conexiones tiene? ¿Es la red hamiltoniana? Si la red es euleriana, ¿cuántos nodos de grado seis tiene?

Solución:

- G es conexo ya que si $6 \leq \delta(v)$ entonces hay al menos 7 vértices en cada componente conexa.
- Como card V = 10, $6 \leq \delta(v) \leq 9$, card A = 13 k entonces $60 \leq \sum \delta(v) \leq 90 \Rightarrow 60 \leq 26\,k \leq 90 \Rightarrow$ $k = 3 \Rightarrow card\ A = 39$ conexiones.
- $\delta(v) \geq 6 \geq n/2 = 5$, entonces G es hamiltoniano.
- Si G es euleriano entonces $\delta(v) = \begin{cases} 6 \\ 8 \end{cases} \Rightarrow \sum \delta(v) = 6\,a + 8\,b = 2$ card A = 78 $\Rightarrow$

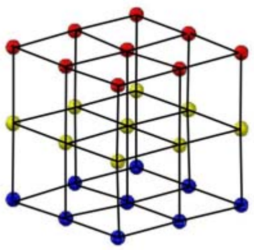
$$\begin{cases} a = -39 + 4\,t \ \geq 0 \\ b = 39 - 3\,t \ \geq 0 \end{cases} \Rightarrow t = 10 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \text{ vértice de grado } 6 \\ b = 9 \text{ vértices de grado } 8 \end{cases}$$

15) Un ratón intenta comerse un cubo de 3×3×3 de queso; empieza en una esquina y se come cada vez un cubo 1×1×1 antes de pasar a uno adyacente, ¿puede comerse el cubo central en último lugar?

Solución:

Cada cubo 1×1×1 del cubo 3 x 3 x 3 es un vértice. Las aristas unen vértices con una cara común.
Cubo 3 x 3 x 3 es un grafo bipartido con un número impar de vértices, 14 vértices negros y 13 vértices blancos, entonces no es hamiltoniano.
Un camino hamiltoniano abierto empieza y termina en vértices negros y el vértice central es blanco, luego, no puede comerse el cubo central en último lugar.

Grafo del cubo 3 x 3 x 3



Camino hamiltoniano abierto en el cubo 3 x 3 x 3